学校编码：10384 分类号________密级________
学 号：200023014 UDC________________

学 位 论 文

随机波动率模型下的期权定价

Option Valuation under Stochastic Volatility Model

刘 智 华

指导教师姓名：李 时 银 副 教 授
厦门大学数学系

申请学位级别：硕 士
专 业 名 称 ： 概率论与数理统计
论文提交时间：2 0 0 3 年 4 月
论文答辩时间：2 0 0 3 年 月
学位授予单位：厦 门 大 学
学位授予日期：2 0 0 3 年 月

答辩委员会主席：__________
评 阅 人：__________

2003 年 4 月

论 文 摘 要

Black-Scholes 期权定价模型假设股票价格遵循具有常数波动率的几何布朗运动， 因此任何将来时刻股票价格的概率分布都是对数正态分布。但是大量的实证研究表明，常数波动率的假设与现实情况相违背，于是人们开始考虑将波动率是常数的假设放宽。1987 年 Hull 和 White 将 B-S 期权定价模型中的常数波动率推广为随机波动率，并在波动率与股票价格不相关的假设下得到解析解。

人们发现随机波动率模型是描述隐含波动率“期限结构”的有效模型，同时可以解释“波动率微笑”现象。在实证中，我们发现波动率具有自回归、均值回复的特性，为了描述这一特性，本文用几何 Ornstein-Uhlenbeck 过程来描述随机波动率，同时保证了波动率为正值。

一旦我们允许波动率随机变化，就意味着效用函数和风险态度重新回到定价公式中。而在 Black-Scholes 模型中，由于风险的完全对冲，效用函数和风险态度是不影响期权定价的。在本文中为了降低对模型的依赖性，我们用不确定性参数的方法：当波动率存在于某个已知区间内时，导出 Black-Scholes-Barenblatt 非线性偏微分方程，最后得到期权组合的价格区间，如果价格出现在此范围外，则意味着存在套利机会。这样，我们就不需要去假设效用函数具有某种特殊形式。

本文在对随机波动率期权定价问题做理论分析的同时，采用我国证券市场上 1999 年 12 月 8 日到 2001 年 10 月 8 日的每小时上证指数作实证分析，估计出随机波动率模型中的有关参数，同时举例说明 Black-Scholes-Barenblatt 非线性偏微分方程在缩小期权价格区间上的效果。在附录中提供了计算 Black-Scholes-Barenblatt 非线性偏微分方程的有关算法和程序，使得文中的结论真实可信，所给的方法有效实用。

关键词：Black-Scholes 期权定价，Black-Scholes-Barenblatt 非线性偏微分方程，Ornstein-Uhlenbeck 过程

Abstract

The Black-Scholes option pricing equation for a stock assumes that the stock price follows the Geometric Brownian Motion and the volatility of the stock price remains constant over the life of the option. Although the latter may be a valid simplifying assumption for short maturity options, it becomes less increasingly plausible as the maturity increases in empirical studies. So more and more studies concentrate on how to extend this assumption. In 1987, Hull and White used Geometric Diffusion model to solve a special option pricing problem with stochastic volatility.

Not only do stochastic volatility models explain the basic shapes of smile patterns, but they also allow for more realistic theories of the "term structure" of implied volatility. In order to generate an options price that is appropriate for the case where volatility follows an autoregressive and mean-reverting stochastic process, a large and growing literature suggests that this case is empirically relevant; we use Geometric Ornstein-Uhlenbeck process to describe stochastic volatility. At the same time we can make sure that volatility is positive.

Once you allow random volatility into the theory, utility functions and risk attitudes come back into the theory also. In a Black-Scholes world, option prices are determined purely by arbitrage arguments and risk attitudes play only an indirect role. But, with stochastic volatility, the absence of arbitrage alone does not fix option prices. In this paper, in order to lessen the model risk, we assume that we do not know exactly the volatility; instead we state a certainty band within which we are sure it will state. In this way we generate confidence limits of the price for the option, which doesn't need to assume utility function.

At the same time, we try to determine the stochastic model for volatility by fitting the drift and variance functions to empirical data and letting tractability take a secondary role. In the appendix, a simple algorithm for solving the Black-Scholes-Barenblatt nonlinear PDE by a trinomial tree is presented.

Keywords: Black-Scholes Equation, Black-Scholes-Barenblatt nonlinear PDE, Ornstein-Uhlenbeck process

目　录

第一章　导 言

第一节　期权的历史回顾

在过去的30多年内，世界金融市场掀起了以衍生产品的创造和交易为标志的革命，期权(option)是国际金融市场创新实践的一个成功典范。期权是一类商业合同，它赋予买方或多头(long position)在将来一定时间内以事先商定的价格选择是否买入(卖出)一定数量和规格的某种标的资产的权利，而卖方或空头(short position)有义务按规定满足买方买(卖)的要求。需要强调的是，买方不一定必须行使该权利。期权有两种基本类型：看涨期权(call option)的持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格购买标的资产，其收益为标的资产价格与执行价格之间的差额；看跌期权(put option)的持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格出售标的资产，其收益为执行价格与标的资产价格之间的差额。期权合约中规定的价格称为执行价格或交割价格(exercise price or strike price)，合约中规定的日期为到期日、执行日或期满日(expiration date, exercise date, maturity)。期权的标的资产包括股票、股票指数、外汇、利率等。

期权交易是一种交易双方的零和游戏，期权买方有买入(卖出)标的资产的权利而不承担义务，而期权卖方则只有义务没有权利。因此买方必须向卖方支付一笔费用才能使卖方进入期权游戏。从而自然的产生这么一个问题：公平的期权费用(期权价格)应该是多少？1973年，Black 和 Scholes 的《The pricing of options and corporate liabilities》这篇诺贝尔经济学奖的扛鼎之作的发表，奠定了期权定价的理论基础，为财务金融学开创了一个崭新的领域。在第二节中，我们会详细介绍期权定价的发展过程，下面我们不妨先了解一下期权交易和期权产品的发展。

期权的交易可以追溯到很久以前。早在公元前3500年，古罗马人和腓尼基

人在进行货物交易的合同中，就已经运用了与期权相类似的条款。不过，最早的有史料记载的期权交易是由古希腊的哲学家撒勒斯(Thales)发明的。在冬季，撒勒斯预测橄榄在来年的春天会有好收成。因此，他与农户进行协商，得到了在来年春天以某一固定的价格使用榨油机的权利。事实证明撒勒斯的预测是正确的。橄榄的丰收使得榨油机供不应求，撒勒斯行使自己的权利，再将榨油机的使用权以更高的价格出租给其他的农户，从中赚取了可观的利润。

19 世纪后期，期权的场外交易市场(Over-the-Counter，简称 OTC 市场)开始出现，各期权交易商每天早上在主要报刊（如华尔街日报、纽约时报等）上刊登广告，公布当天可提供交易的期权品种的有关信息（包括合同的执行价格、到期日以及价格等)。如果投资者想要购买或出售某一期权的话，可以直接打电话给期权交易商进行洽商。当时，有一位名叫萨奇(Russell Sage)的铁路大投机商对期权交易策略很有研究，因而被后人称为“期权之父”。他所提出的“转换(conversions)”和“逆转换(reverse conversions)”的期权交易策略，至今仍然被人们广泛使用。所谓转换，即做多看跌期权和标的股票，同时做空看涨期权。根据看涨-看跌平价公式，执行这一策略的结果可以得到无风险回报。

1973 年 4 月 26 日美国芝加哥期权交易所(Chicago Board Options Exchange，简称 CBOE)正式开始进行股票期权(stock option)交易，这标志着期权市场的发展进入了一个新的历史时期，为财务金融学理论和实践带来了巨大的冲击和影响。与传统的场外交易市场相比，CBOE 做了以下两个方面的开创性工作：第一，对上市交易的期权合同进行了标准化，如规定了各种期权的到期月份以及到期日，规定了合同执行价格的设置方法等。期权合同的标准化为投资者进行交易提供了极大的方便，从而有力促进了二级市场的发展。第二，成立了期权清算公司这样一个中介公司，集中处理期权交易的清算和交割事宜，从而为期权的交易和执行过程提供了可靠的保障。

期权市场发展十分迅猛，现在期权在世界各地的不同交易所中都有交易，银行和其他金融机构同时也进行大量期权合约的场外交易。从期权产品的发展

来看，可分为第一代产品和第二代产品。第一代产品叫“plain Vanilla”，即标准的欧式期权和美式期权。欧式期权(European option)只能在期权到期日执行，美式期权(American option)可在期权有效期内任何时刻执行。第二代产品被称为“exotics options”，也就是我们所说的新型期权，它实质上是在标准的欧式期权和美式期权的基础上衍生出来的衍生证券。例如：打包期权、俄式期权、亚式期权、复合期权、路径依赖期权等等。这些新型期权的收益函数形式比标准欧式或美式期权更复杂，大多数新型期权在场外交易，它们是由金融机构设计以满足市场特殊需求的产品，有时还将债券和股票加入期权，以增加投资者的兴趣。新型期权的种类众多，而且随市场的变化不断推陈出新，同时这些产品的产生也为传统的定价和套期保值方法提出了新的挑战。

第二节　期权定价的发展

金融资产的定价问题（asset valuation）是现代财务金融理论的一个基本问题。对于股票、债券等基础金融工具，其价值一般都是通过净现值方法来确定的。但是这种方法并不适用于期权的定价。主要原因之一是由于运用净现值方法需要事先确定一个适当的贴现率，即资本成本。按照财务理论，该贴现率的大小应与投资风险大小成正比，即它是由无风险利率加上风险报酬率所组成。对于期权来讲，其风险肯定比投资标的资产大的多，但这个风险的确定和其相应的风险报酬率的计算却不是一个容易的问题。

对于期权定价问题的研究最早可以追溯到 1900 年，Bachelier 在其博士论文《The Theory of Speculation》中首次给出了欧式看涨期权的定价公式[21]：

$$c(s_t,t)=s_tN(\frac{s_t-k}{\sigma\sqrt{T-t}})-kN(\frac{s_t-k}{\sigma\sqrt{T-t}})+\sigma\sqrt{T-t}n(\frac{k-s_t}{\sigma\sqrt{T-t}}) \qquad (1.1)$$

其中：s_t 是标的股票的当前价格，k 是期权交割价格，T 是期权到期日，t 是当前时刻，σ 是收益的波动率，N 是正态分布累积函数，n 是正态分布的密度函数。可惜的是，他在建立模型时犯了 3 个原则性的错误。第一，假设标的股票

的价格服从正态分布，这使得股价出现负值的概率大于零，从而与现实明显不符。第二，导出在离到期日足够远的时候，看涨期权的价值可能大于标的股票的价值的结论，这显然也是不可能的。第三，假设股票的期望报酬率为零，这也违背了股票市场的实际情况，而且没有考虑货币的时间价值。尽管如此，Bachelier 的研究结果为后人指出了方向。

在 Bachelier 的研究基础上，人们对期权定价问题进行了长期的研究。1964 年，Sprenkle 提出了“股票价格服从对数正态分布”的基本假设，并肯定了股价发生瞬时漂移的可能性，他排除了负的股票价格，在风险厌恶的假设下，他导出下列公式[21]：

$$c(s_t,t)=e^{\rho(T-t)}s_tN(d_1)-(1-A)kN(d_2) \tag{1.2}$$

其中，$d_1=\dfrac{\ln\dfrac{s_t}{k}+(\rho+\dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}, \rho$ 是股票价格的漂移率，A 是风险厌恶程度。正如从该公式中看到的那样，股票价格的漂移率和风险厌恶程度的参数必须估计。Sprenkle 曾经试图估计这些参数的值，但是没有成功。

同年，Boness 利用股票的期望收益率，通过将到期股票价格贴现来计算货币的时间价值得到期权定价公式[21]：

$$c(s_t,t)=s_tN(d_1)-ke^{\rho(T-t)}N(d_2) \tag{1.3}$$

但他没有考虑期权和标的股票之间风险水平的差异。

1965 年，著名经济学家 Samuelson 把上述成果统一在一个模型中[21]：

$$c(s_t,t)=e^{-(\rho-\alpha)(T-t)}s_tN(d_1)-e^{-\alpha(T-t)}kN(d_2) \tag{1.4}$$

α 为买入期权价值的平均增长率。1969 年，他又与其学生 Merton 合作，提出了把期权价格作为标的股票的函数的思想。他们意识到，贴现率至少有一部分应该由投资者持有的所有股票和期权来决定。他们的最终公式依赖于对于一个“典型”投资者假定的效用函数。

在 1973 年 Black 和 Scholes 提出 Black-Sholes 期权定价模型之前，虽然

学者们已经建立了各种各样的期权定价模型，但这些模型几乎不具备任何实际价值，因为他们或多或少地包含一些主观的参数，如投资者个人对风险的态度、市场均衡价格等。20 世纪 60 年代末，Black 在其取得哈佛大学数学博士学位后开始与 MIT 的 Scholes 合作研究期权的定价问题，利用 Thorp 和 Kassouf(1967 年)关于对认股权证定价的一个公式找到了期权定价模型的关键突破口，即构造一个由标的股票和无风险债券的适当组合来精确复制期权在到期日的收益函数，根据无套利定价原则，对冲组合的期望收益一定是无风险资产收益。因此 Black 和 Scholes 得到了描述期权价格变化的偏微分方程，并依此导出了 Black-Sholes 期权定价公式。在下一节中我们会回顾一下该定价公式的推导过程。

除了 Black 和 Scholes 以外,Merton 也对期权定价理论和实践的发展做出了独立的和开创性的贡献，他几乎和 Black 和 Scholes 同时，得到了期权定价模型和其他一些重要成果。1976 年，Merton 把 Black-Sholes 期权定价模型推广到股票价格可能存在跳跃点的场合，并包含了标的股票连续支付股利的情况，从而把该模型的实用性大大推进了一步，学术界将其命名为 Merton 模型。

第三节　回顾 Black-Scholes 框架

Black 和 Scholes 推导出当股票价格遵循常数波动率的几何布朗运动情况下的期权价格公式(以下简称 B-S 公式)。由于风险的完全对冲，他们得到的期权定价公式与投资者对风险的偏好和预期无关。因此，可以在风险中性测度的世界中定价，定价公式中没有几何布朗运动的漂移项μ，但波动率σ对期权价格仍起很大作用。

在下列假定下，期权价值只依赖于标的股票价格s、时间t，以及另外一些假定为常数的变量，这些假设如下：

(1) 股票不付红利或其他收益；

(2) 期权为欧式期权，到期日才能履行合约，期权到期时刻为T，交割价格为K；

(3) 买卖股票或期权没有交易成本；

(4) 无风险利率为 r 在期权有效期内为常数；

(5) 证券交易是连续的，可以交易任意数量的股票；

(6) 不存在无风险套利机会；

(7) 股票价格为 s_t，当前时刻为 t，并且股票遵循几何布朗运动：

$$\frac{ds_t}{s_t} = \mu dt + \sigma dw_t \tag{1.5}$$

其中：μ——漂移率，以连续复利计的年预期收益率，在期权有效期内为常数；

σ——股票价格的年波动率，在期权有效期内为常数；

dw_t——w_t 是 Wiener 过程的变量，dw_t 表示它的值在一短时间区间 dt 的变化：$dw_t = \phi\sqrt{dt}$，ϕ 是标准正态随机变量。

这里当股票收益的波动率不变时，股票价格是对数正态分布。由于期权价格 $c(s,t)$ 是股票价格 s 和时间 t 的函数，所以用 Ito 随机微分公式可以得到:

$$dc = (\frac{\partial c}{\partial t} + \mu s\frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2})dt + \sigma s\frac{\partial c}{\partial s}dw_t \tag{1.6}$$

构造一个自融资[1](self-finance)组合 π_1：一份欧式看涨期权 $c(s,t)$ 和 Δ 份的标的股票 s。因此组合 $\pi_1 = c(s,t) - \Delta s$，当取 $\Delta = \frac{\partial c}{\partial s}$ 时，组合在 dt 时间内的变化为：

$$\begin{aligned} d\pi_1 &= dc - \Delta ds \\ &= (\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2})dt \end{aligned} \tag{1.7}$$

由(1.7)可以看出风险项已不存在，故组合 π_1 是无风险组合，所以必须获取无风险回报：

[1] 假设投资者拥有一个投资组合，如果不在初始投资中额外地加入或撤出资金，组合的价值由组合中证券价格的变化而变化，则该投资策略成为自融资。这时组合中增加某证券数量的费用完全来源于减少同一组合中另外证券数量而获得的资金。

$$d\pi_1 = r\pi_1 dt \tag{1.8}$$

因此有

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 c}{\partial^2 s} + r(s\frac{\partial c}{\partial s} - c) = 0 \tag{1.9}$$

在以上方程中没有出现μ，所以股票的漂移率对期权价格不产生影响。

加上终值条件：$c(s,T) = h(s_T) = \max(s_T - k, 0)$ （1.10）

和边界条件：$c(s,t) = s_t - ke^{-r(T-t)}$ ，当$s_t \to \infty$

$c(s,t) = 0$ ，当$s_t \to 0$ （1.11）

通过解偏微分方程(1.9)，最后可以得到 B-S 期权定价公式：

$$\begin{gathered} c_{BS}(s,t;\sigma,r;k,T) = s_t N(d_1) - ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln\frac{s_t}{k} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{gathered} \tag{1.12}$$

该模型的主要魅力在于其公式是“可观测”变量的函数，并且模型可以推广到任何类型的期权定价上。由看涨－看跌平价关系[2]，可以得到欧式看跌期权的定价公式：

$$p_{BS}(s,t;\sigma,r;k,T) = ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - s_t N(-d_1) \tag{1.13}$$

上面的期权定价公式$c_{BS}(s,t;\sigma,r;k,T)$或$p_{BS}(s,t;\sigma,r;k,T)$由两个变量四个参数决定，前两个是相互独立的变量，后两个数由合同规定，中间两个是股票运动和金融市场的参数[3]。在s,t,r,k,T假定已知的情况下，一旦知道了波动率σ，就可以得到期权价格；反之，一旦知道期权价格，用叠代算法就可以得到波动率，我们称之为隐含波动率σ_{imp} (implied volatility)——从市场中观察到的期权价格用 B-S 公式反推所获得的隐含波动率，实质上蕴含了市场投资者对未来的

[2] $c_t - p_t = s_t - ke^{-r(T-t)}$，它表明具有某一确定执行价格和到期日的欧式看跌期权的价格可根据具有相同执行价格和到期日的欧式看涨期权的价格推导出来，如果该等式不成立，则存在套利机会。

[3] 由于股票期权价格对利率变化不敏感，而且中国市场无风险利率变化不频繁，所以本文中假设利率在期权有效期内为常数。

时间内股票波动率的平均估计值，因此波动率在期权市场上具有极其重要的作用。

人们在实践中对波动率、股票价格和期权价格三者关系的研究中发现以下三个特点：

第一，一个期限较短的期权的隐含波动率高于另一个其他方面与之完全相同，但期限较长的期权的隐含波动率。我们称为隐含波动率的“期限结构”。

第二，当股票价格较高时，波动率反而变小，使得股票向上波动的可能性变小；反之，当股票价格较低时，波动率变大，使得股票进一步下探的可能性变大。假如我们画出真实的股票价格的概率分布，并和对数正态分布相比较，可以看到真实分布的左边尾部高于对数正态的部分，而在右边尾部情况则反过来。

第三，“波动率微笑”，如果现时股票价格为s_t，无风险利率为r，期权有效期长度为$T-t$，这时隐含波动率在交割价格$k=s_te^{r(T-t)}$时最小，也就是期权处于平值状态(at-the-money)时 B-S 公式对波动率呈线性关系。但当期权处于虚值(out-of-the-money)或实值(in-the-money)状态时，相对于平值状态的期权则具有更大的波动率。所以使用 B-S 公式会高估处于平值或接近平值状态的期权价格，且低估了处于深度虚值或深度实值状态的期权价格[4]。

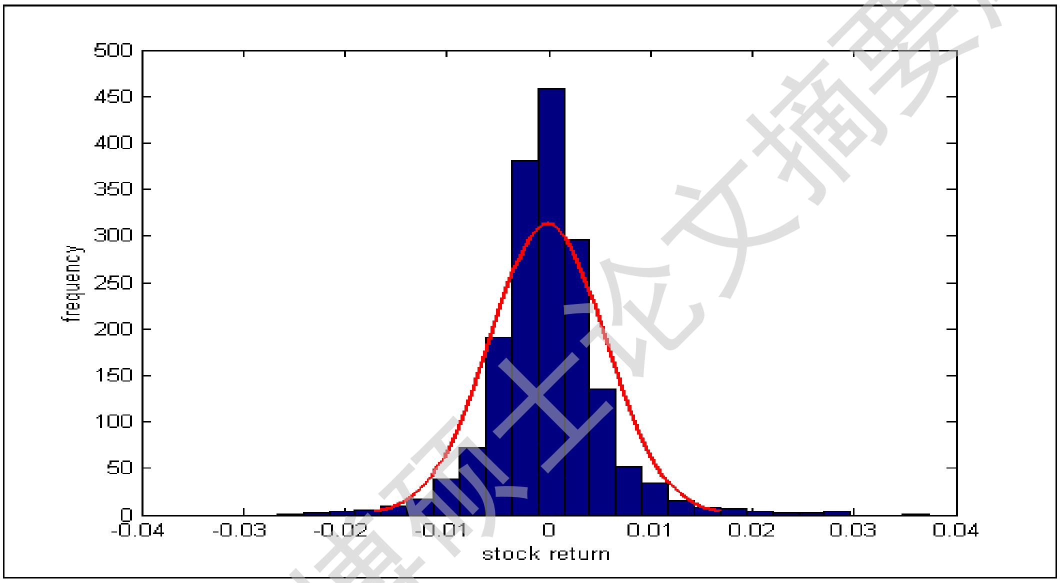
第四节　波动率改进模型

上面我们已经知道了在常数波动率假设前提下的 B-S 公式。B-S 模型假设在任何将来的时刻股票价格的概率分布是对数正态分布。由于波动率是 B-S 公式中唯一不能观察的常数，故期权价格是波动率的函数。如果模型是完备的，隐含波动率在期权市场对所有期权应是相同的。然而在实际市场中，真实的波

[4] 平值期权是指如果期权立即执行，持有者的现金流为零，即$k=s_te^{r(T-t)}$；实值期权是指如果期权立即执行，持有者具有正的现金流，即$k<s_te^{r(T-t)}$；虚值期权是指如果期权立即执行，持有者的现金流为负，即$k>s_te^{r(T-t)}$。

动率却经常出现如前面所述的三个特点。特别是自从 1987 年市场大跌发生后，股票指数巨幅下降的市场行为已被市场参与者较好的了解了。大跌后，虚值看涨(看跌)期权比 B-S 公式计算的价格便宜(昂贵)。这是因为真实的概率分布的左边(右边)尾部更胖(瘦)的原因。这里我们通过 1999 年 12 月 8 日到 2001 年 10 月 8 日的每小时上证指数的收益率的频率图可以看到真实的概率分布就是这样(见图【1】样本量：1740)。

图【1】股票收益率的真实概率分布



中间的曲线是正态分布，柱形图是真实的分组频率图，可以发现真实概率分布具有“尖峰厚尾”现象。

在普通的市场情况下，虚值看跌期权会比虚值看涨期权在较高的波动率下交易。实践者应用 B-S 公式时必须不断地调整波动率参数，毫无疑问，不能假设真实市场的波动率为常数，因此也就产生了波动率的各种改进模型。应该注意的是，大多数改进模型没有解析解，需要使用数值方法来得到期权价格。这并不令人奇怪。事实上，随机波动率是不可对冲的风险来源，结果没有唯一的风险中性测度来给期权定价，所要求的市场完全性得不到满足。

§1.4.1 局部波动率模型 (local volatility model)

Dupire，Derman 和 Kani(1994 年)提出，让波动率随股票价格和时间变动：

$$\frac{ds_t}{s_t}=\mu dt+\sigma(s_t,t)dw_t \tag{1.14}$$

从上式中我们可以看到股票的波动率由时间和股票价格唯一确定，因此一旦知道当前时刻t和当前的股票价格s_t，就可以知道波动率$\sigma(s_t,t)$。同时，对不同的股票价格，局部波动率对不同的期权种类的影响效果是不同的。例如：股票价格很低时，局部波动率对有着高交割价格的看涨期权价格影响甚微，因为这时如果股票价格偏低时，期权的收益几乎接近于 0；但这时局部波动率对有着低交割价格的看跌期权影响显著，因为在低股票价格时，同时具有高波动率，增加了股票价格低于交割价格的可能性，也就增加了期权的价值，使得期权有较大的收益。该模型有两类典型模型：

1．时间依赖波动率模型(time-dependent volatility)：

$$\frac{ds_t}{s_t}=\mu dt+\sigma(t)dw_t \tag{1.15}$$

该模型可以拟合不同期限的具有相同标的股票和交割价格的期权价格，而且定价简单[12]：

$$c_{TD}=c_{BS}(\bar{\sigma}),\qquad \text{其中}\ \bar{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T\sigma^2(\tau)d\tau} \tag{1.16}$$

但是该模型无法解释具有不同交割价格，其它相同的期权价格的差异。

2．常数弹性波动率模型(constant elasticity of variance)：

$$\frac{ds_t}{s_t}=\mu dt+\delta s_t^{\eta-1}dw_t \tag{1.17}$$

当$\eta=1$时，(1.17)是几何布朗运动。为了更好地描述股票价格与波动率之间的关系，一般取$\eta<1$，这样当波动率变大时，股票价格下跌。该模型可以得到解析解[12]：

$$c_{CEV}=s_t\bar{F}(y,2+\frac{1}{1-\eta},\xi)-ke^{-r(T-t)}\bar{F}(y,2-\frac{1}{1-\eta},\xi) \tag{1.18}$$

其中$F(y,n,\xi)$是非中心χ^2分布的概率累积函数$\bar{F}=1-F$，n是自由度，ξ是非

中心参数$\xi=\alpha s_t^{2(1-\eta)}e^{2r(1-\eta)(T-t)}$，$y=\alpha k^{2(1-\eta)}$，$\alpha=\dfrac{2r}{\delta^2(1-\eta)(e^{2r(1-\eta)(T-t)}-1)}$。这个模型很容易使用，不幸的是，该模型的缺点是允许股票价格为负值。

局部波动率模型的优点在于该模型只存在一个风险源，因此期权定价仍保持在完全市场中，所得到的期权价格与投资者的偏好和预期无关，所以仍可得到解析解，可以用改进的二叉树模型(隐含树图)定价。其主要缺点是该模型可与今天市场上的波动率微笑和波动率期限结构相吻合。然而，该树图本身也隐含了未来的某个波动率微笑和波动率期限结构，它们可能与今天市场上所观测到的这些值很不相同。当一笔交易依赖于未来某个时刻所观察的波动率时，用局部波动率模型定价会有偏差。

§1.4.2 随机波动率模型 (stochastic volatility model)

由于波动率σ难于预测和估计，且其对期权定价有重要影响，所以很自然的也就想用随机波动率模型来描述。随机波动率模型是指真实波动率是随机的，而非单纯用时间和股票价格来解释。因此我们需要构造另一个随机过程来描述波动率的变化。在实际的概率测度 P 下，

$$\begin{cases} ds_t = s_t[\mu dt+\sigma(y_t)dw_t] \\ dy_t = a(t,y_y)dt + b(t,y_t)dz_t \end{cases} \quad 0\le t\le T, <dw_t, dz_t>=\rho dt \tag{1.19}$$

其中μ是常数，是股票的期望收益率；$\sigma(y_t)$是股票的波动率，它是另一个随机过程y_t的函数；w_t和z_t是 Wiener 过程，ρ是他们的相关系数，说明波动率和股票价格的关系，这种关系是局部波动率模型中所重点描述的。在此，如果我们仍然想保留这一特性，则$\rho\neq 0$，一般$\rho<0$。一旦允许波动率随机，那么效用函数和风险态度就会回到定价公式中来，这是与 B-S 模型所不同的，这时我们面对的是不完全市场[5]。下面我们来回顾一下随机波动率模型的发展过程。

[5] 相对于完全市场而言，一个可生存的金融市场是完全市场当且仅当存在与概率P等价的唯一的概率$\tilde{P}$，使得在概率$\tilde{P}$下的证券价格具有鞅性质。在不完全市场中，则会存在一系列等价的概率$\tilde{P}$，使得定价不唯一。

Hull 和 White(1987 年)提出的随机波动率模型[2]：

$$\begin{cases} ds_t = s_t[\mu dt + \sigma dw_t] \\ dV = \alpha V dt + \beta V dz_t \end{cases} \quad 0 \le t \le T, <dw_t, dz_t> = 0, V = \sigma^2 \tag{1.20}$$

为了得到唯一解，他们假设 dw_t 和 dz_t 是不相关的，即 $\rho = 0$，且波动率没有系统风险。后者意味着波动率风险不带来任何风险溢酬。有了这些附加的假定，就可得到在风险中性概率测度下折现到期收益的期望计算的唯一的期权价格：

$$\begin{aligned} c_{HW}(t, s_t, \sigma_t^2) &= e^{-r(T-t)} \tilde{E}_t[\tilde{E}(S_T - k)^+ \,|(V_\tau, t \le \tau \le T)] \\ &= \int_0^\infty c_{BS}(s_t, t, \bar{V}) d\tilde{F}(\bar{V}, s_t, \sigma_t^2) \end{aligned} \tag{1.21}$$

其中，$c_{BS}(s_t, t, \bar{V}) = s_t N(d_1) - k e^{-r(T-t)} N(d_2)$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s_t}{k} + (r + \frac{1}{2}\bar{V}(T-t))}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}},\ d_2 = d_1 - \sqrt{\bar{V}(T-t)},\ \bar{V} = \tilde{E}_t[\frac{1}{T-t}\int_t^T V_\tau d\tau]\ 。$$

$\tilde{E}$ 和 $\tilde{E}_t$ 是风险中性概率测度下的期望，$\tilde{F}$ 是风险中性概率测度下给定 s_t 和 σ_t^2 时 $\bar{V}$ 的条件分布。将以上方程中的 c_{HW} 在 $\beta = 0$ 点[6]用 Taylor 展开得到期权价格的近似公式：

$$\begin{aligned} c_{HW} = {} & s_t N(d_1) - k e^{-rt} N(d_2) + \frac{1}{2} s_t \sqrt{t} N(d_1)(d_1 d_2 - 1)[2\sigma_t^4 (e^h - h - \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2})] \\ & + \frac{1}{6} s_t N(d_1)[(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)] \\ & + \frac{1}{8} \sigma_t^6 (\frac{\sigma_t^6}{3h^3})[e^{3h} - (9 + 18h)e^h + (8 + 24h + 18h^2 + 6h^3)] \end{aligned} \tag{1.22}$$

其中 $h = \beta^2 (T - t)$。

M.Stein 和 C.Stein(1991 年)研究当股票价格服从具有变化波动率参数的扩散过程时的股票价格分布。他们得到关于随机波动率下期权定价的有趣结果，以及这个参数与股票价格分布中的“厚尾”性质之间的关系。他们的模型比 Hull-White 模型更一般。这是因为 Hull-White 为了明确解出期权价格，在 $\beta = 0$

[6] 在该点波动率非随机的。